Baneberegning for Planeter ved en Modifikation af de Kepplerske Love.

Af

T. N. Thiele.

(Meddelt i Mødet den 18. April 1884.)

Da man uden Overdrivelse tør paastaa, at man kjender alle de i Solsystemet virkende Kræfter lige ned til rene Ubetydeligheder, skulde man være tilbøjelig til at mene, at Beregningen af et Himmellegemes Bevægelse, maatte være vel ikke et let Arbejde, men dog et, der ikke behøvede at gaa ad kunstige Omveje.

Naar man kjender Kræfterne og det Sted, hvor Stjernen stod i Rummet paa en given Tid, samt den Hastighed og Retning, hvormed den passerede dette Sted, eller blot to Steder i Rummet, hvor Stjernen har været i to hinanden nære Tider, saa er Beregningen mulig og kan simpelthen udføres saaledes, at man paa Papiret med Tal eftergjør, hvad der sker med Stjernen selv fra det ene Øjeblik til det næste.

Men Kræfterne ere netop givne paa en saadan Maade i Afhængighed af Tiden og Stjernens eget Sted, at man saa noget nær ogsaa maa have de Tal, man skal hente fra Iagttagelserne, givne netop i Form af et Par nærliggende fuldstændige Stedbestemmelser, for at man skal være berettiget til at sige, at man kjender de virkende Kræfter. Og nu er Forholdet det, at vore Iagttagelser aldrig give os fuld Besked om den iagttagne Stjernes

Sted, men altid lade os i fuldstændig Uvished om Stjernens Afstand fra Iagttageren; det er kun Synslinien, som Iagttagelserne give, Stedet paa Linien er ubekjendt.

Paa den ene Side tvinges man altsaa til at vælge det givne paa saadan Maade, at tre eller flere Retningsiagttagelser træde i Stedet for de to fuldstændige Stedbestemmelser; men paa den anden Side kræver Opgavens Natur bestemt, at det givne skal foreligge i Form af de to fuldstændige Stedbestemmelser.

Ud af dette Dilemma hjælpe Astronomerne sig ved et godt og gammelt Kunstgreb; man supplerer to Retningsiagttagelser med hypothetisk antagne Værdier for Afstanden, hvilke man forbeholder sig at rette paa, saalænge indtil de øvrige Retningsiagttagelser ere tilfredsstillede. Men for at Regningen efter denne Plan ikke skal blive uoverkommeligt vidtløftig, er det nødvendigt, at man begynder Regningen med Værdier for de gjættede Afstande, som ikke fjerne sig altfor meget fra Sandheden.

Dette er Oprindelsen til den saakaldte theoriske Astronomi, i hvilken man endnu benytter de Kepplerske Love, uagtet de kun kunne fremstille Bevægelserne indenfor meget korte Tidsrum. Man er tvungen til at anvende Tilnærmelsesformler, og dertil ere de Kepplerske Love fortræffelige; thi som Gauss har vist, er det let efter dem at beregne de ubekjendte Afstande, og de Værdier, man finder for disse, ville tillige i Reglen ligge Sandheden saa nær, at man kommer til Ende med Forsøgene i de faa Gjentagelser af Regningen, som alligevel maatte gjøres for at kunne bygge paa tilstrækkeligt udstrakte Rækker af Iagttagelser.

Men fordi den Kepplerske Tilnærmelse er god, er det ikke sagt, at den er den eneste anvendelige, og navnlig maa det fastholdes, at Bestemmelsen af Elementerne i de Kepplerske Baneellipser er noget meget underordnet, og at Hovedsagen er Bestemmelsen af de ubekjendte Afstande mellem Jorden og Stjernen.

Den theoriske Astronomi er rigtignok paa Grundlag af de Kepplerske Love for Tiden udarbejdet med en saadan Finhed i alle Detailler og lagt saa vel til Rette for Regnerne, at den ikke lader meget tilbage at ønske. Men selv om man ikke ad anden Vej skulde kunne naa videre end til en lige saa god Methode, saa er det dog ikke helt overflødigt at se sig om til Siderne.

Idet Gauss og de senere theorisk astronomiske Forfattere stræbe henimod at reducere Opgaven netop til Bestemmelse af de ubekjendte Afstande og derfor maa eliminere alt, hvad der refererer sig til Banen og dens Elementer, føres de naturligt til at stille de Ligninger imellem tre retvinklede heliocentriske Koordinater i Spidsen,

$$\begin{aligned} x_1 \psi_{2,3} + x_2 \psi_{3,1} + x_3 \psi_{1,2} &= 0 \\ y_1 \psi_{2,3} + y_2 \psi_{3,1} + y_3 \psi_{1,2} &= 0 \\ z_1 \psi_{2,3} + z_2 \psi_{3,1} + z_3 \psi_{1,2} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

som i sig selv kun udsige, at de tre Steder ligge i Plan sammen med Solen. $\psi_{2,3}$, $\psi_{3,1}$ og $\psi_{1,2}$ blive herved proportionale med Arealerne af tre Trekanter, hver mellem Solen og de to gjennem Indices betegnede Steder. Hvad der skal føjes til disse Ligninger, bliver da Afhængigheder mellem ψ'erne og de tre Tider t_1, t_2 og t_3 svarende til de antagne Kræfter. Og hertil haves da, naar man udaf den theoriske Astronomis Forraad griber Formler, i hvilke Eliminationen af Baneelementerne delvis er foretaget, for hvert ψ følgende 4 Ligninger

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} &= a\sqrt{a}\ (\sin 2D - 2e\cos S \sin D) \\ k(t_2 - t_1) &= a\sqrt{a}\ (2D - 2e\cos S . \sin D) \\ \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) &= a(1 - e\cos S . \cos D) = s_{1,2} \\ \sqrt{r_1 r_2}\cos\tfrac{1}{2}(V_2 - V_1) &= a(\cos D - e\cos S) = g_{1,2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Her er k en for hele Planetsystemet fælles Konstant, r_1 og r_2 de heliocentriske Afstande, $V_2 - V_1$ den heliocentriske Vinkel (de sande Anomaliers Differens) mellem de to Steder, $s_{1,2}$ og $g_{1,2}$

altsaa Tal, som kun afhænge af de ubekjendte Afstande ($s_{1,2}$ paa noget simplere Maade end $g_{1,2}$), medens a, $e \cos S$ og D ere tre Tal, som bør elimineres. Dette er for de to førstnævnte Tal let nok og kan ogsaa ved Rækkeudvikling eller særlige Tabeller udføres for D's Vedkommende; man kan altsaa beregne ψ efter en vis Formel,

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} &= \Psi(t_2 - t_1,\ s_{1,2},\ g_{1,2}) \\ \psi_{3,1} &= \Psi(t_1 - t_3,\ s_{3,1},\ g_{3,1}) \\ \psi_{2,3} &= \Psi(t_3 - t_2,\ s_{2,3},\ g_{2,3}), \end{aligned} \tag{3}$$

og ved Indsættelse heraf i (1) faas 3 Ligninger, med den mest sammentrængte Fremstilling af hele Indholdet af den theoriske Astronomi, efter de Kepplerske Love.

Forudsætte vi, at vi kjende Retningsiagttagelser af Stjernen til de tre Tider t_1, t_2 og t_3, saa indeholde disse Ligninger ikke andre ubekjendte end de tre Afstande fra Iagttageren, og disse kunne derved bestemmes, lettest efter den af Gauss benyttede afbrudte Rækkeudvikling,

$$\psi_{1,2} = k(t_2 - t_1) - \frac{k^3(t_2-t_1)^3}{6\,r^3},$$

hvor r kan være en hvilkensomhelst af Stjernens heliocentriske Afstande i det af Iagttagelserne omfattede Tidsrum.

De samme tre Ligninger ((1) med Indsættelsen af (3)) kan man ligeledes benytte, naar det forudsættes, at man kjender de til Tiderne t_1 og t_2 svarende Steder (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) fuldstændigt; man kan derved til en vilkaarlig Tid t_3 beregne Stedet (x_3, y_3, z_3), saaledes som det vilde være, naar Kræfterne virkelig vare, som de forudsættes ved den Kepplerske Tilnærmelse. Rigtignok vil man hertil behøve tilnærmede Værdier for r_3 og v_3, som gjennem $s_{2,3}$, $s_{3,1}$, $g_{2,3}$ og $g_{3,1}$ indgaa i $\psi_{2,3}$ og $\psi_{3,1}$. Saadanne kan man imidlertid skaffe sig ved Interpolation med de først beregnede Værdier, der svare til de tre Observationstider, men dertil medgaar en Del Arbejde, som navnlig hidrører fra Beregningen af de sande Anomalier, $V - V$ og altsaa fra $g = \sqrt{rr} \cos \frac{1}{2}(V - V)$, som indgaar i (3).

Hvad jeg nu ved denne Lejlighed har at fremføre af mit eget, knytter sig til den Særegenhed ved Ligning (3), at Tallene s og g, som, naar Mellemtiderne ere smaa, kun afvige fra hinanden ved en Differens af 2den Orden, yderligere indgaa i denne Ligning paa en saadan Maade, at denne deres lille Forskjel, i alt Fald naar Banen ikke er yderligt excentrisk, saa godt som slet ikke kan komme til at gjøre sig gjældende, førend Mellemtiderne blive saa store, at de Kepplerske Love blive uanvendelige. At dette er Tilfældet, vises maaske simplest paa den indirekte Maade, at man i Eliminationen mellem Ligningerne (2) undlader at benytte Ligningen for g og derfor beholder den ubekjendte a, Stjernens Middelafstand fra Solen, i Endeligningen. Det vil da kunne vises, at a kun spiller en aldeles betydningsløs Rolle deri.

Eliminerer man $e \cos S$ ved den tredie Ligning (2) (for s) findes

$$\psi_{1,2} = a\sqrt{a}\left(\sin 2\,D - 2\,\frac{a - s_{1,2}}{a}\,\text{tang}\,D\right)$$

$$k\,(t_2 - t_1) = a\sqrt{a}\left(2\,D - 2\,\frac{a - s_{1,2}}{a}\,\text{tang}\,D\right).$$

Sættes her tang $D = x$

altsaa $\qquad D = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$

$$\sin 2\,D = 2\,(x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots)$$

haves

$$\psi_{1,2} = 2\,a\sqrt{a}\left(\frac{s_{1,2}}{a}\,x - \phantom{\tfrac{1}{3}}x^3 + \phantom{\tfrac{1}{5}}x^5 - \phantom{\tfrac{1}{7}}x^7 + \ldots\right)$$

$$k\,(t_2 - t_1) = 2\,a\sqrt{a}\left(\frac{s_{1,2}}{a}\,x - \tfrac{1}{3}\,x^3 + \tfrac{1}{5}\,x^5 - \tfrac{1}{7}\,x^7 + \ldots\right),$$

eller naar $x = u\sqrt{\dfrac{s_{1,2}}{a}}$ og for Korthed $s = s_{1,2}$ $\psi = \psi_{1,2}$,

$$\psi = 2\,s\sqrt{s}\left(u - u^3 + \left(\frac{s}{a}\right)u^5 - \left(\frac{s}{a}\right)^2 u^7 + \ldots\right)$$

$$t = k(t_2 - t_1) = 2\,s\sqrt{s}\left(u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{s}{a}\right)u^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{s}{a}\right)^2 u^7 + \ldots\right) = \tau s\sqrt{s},$$

og elimineres her imellem u, findes:

$$\frac{\psi}{s\sqrt{s}} = \sin\tau + \frac{s-a}{a}\left(\tfrac{1}{20}\tau^5 + \tfrac{1}{3360}\tau^7 + \tfrac{1}{2240}\tau^9 + \ldots\right.$$

$$- \left(\frac{s-a}{a}\right)^2 \left(\tfrac{3}{224}\tau^7 + \tfrac{1}{720}\tau^9 + \ldots\right.$$

$$+ \left(\frac{s-a}{a}\right)^3 \left(\tfrac{1}{288}\tau^9 + \ldots\right.$$

Naar Banen er cirkulær, vil man da altid have nok i første Led af denne Række, og ligesaa overhovedet saalænge Mellemtiderne ikke ere saa store, at τ_1 (der tilnærmelsesvis er Differensen i sand Anomali, i sin 5te (eller dog 4de) Potens kan gjøre sig gjældende trods den formindskende Faktor $\frac{s-a}{20\,a}$. Altsaa sætter jeg

$$\psi_{1,2} = s_{1,2}^{\frac{3}{2}} \sin\left(k(t_2 - t_1)\, s_{1,2}^{-\frac{3}{2}}\right)\text{[1]}. \tag{4}$$

Det er paa denne Ligning, at jeg ønsker at henlede Opmærksomheden. Jeg foreslaar at benytte den, indsat i Ligningerne (1), som Definition paa den Tilnærmelse til Stjernens Bevægelse, som jeg tror, at man overfor Baneberegninger vil staa sig ved at sætte i Stedet for de Kepplerske Love.

Grundtrækkene i Beregningen af en Planets Afstande ville da være følgende.

I første Hypothese antages alle 3 Afstande fra Solen at være indbyrdes lige store, og sættes f. Ex. til $r = 3.8$, naar Stjernen formodes at høre til Asteroidernes Gruppe; i de senere Hypotheser sættes r_1, r_2 og r_3, saaledes som de faas fra forrige Hypothese eller ved Interpolation fra et Antal af de foregaaende. (At der formelt gjøres Hypothese om saamange Tal som 3, behøver ikke at nødvendiggjøre Gjennemregningen af det fulde Antal af 4 Hypotheser.)

---

[1]) I den Tid, i hvilken jeg paa Grund af Sygdom har maattet opsætte denne Meddelelse, har denne Ligning ved Hr. J. Kleiber's Meddelelse i Astronomische Nachrichten tabt noget af sin Nyhed og Interesse.

Med Middeltallene mellem to og to af de hypothetiske heliocentriske Afstande som Værdier af $s_{1,2}$, $s_{3,1}$ og $s_{2,3}$ samt med Tiderne t_1, t_2 og t_3 beregnes $\psi_{1,2}$, $\psi_{3,1}$ og $\psi_{2,3}$ efter (4).

Disse ψ'er indsættes i (1), idet tillige de heliocentriske retvinklede Koordinater henføres til Iagttagelsesstederne: betegne ξ, η, ζ med Tidens Index Solens Koordinater regnede fra Iagttagelsesstedet, og $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ Koordinaterne ligeledes fra Iagttagelsesstedet for Punkter valgte med Afstandene $= 1$ fremad paa Synslinien, og ere $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ og $\mathfrak{r}_3$ de ubekjende Afstande fra Iagttageren til Stjernen, da ere

$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{x}_1 \psi_{2,3} + \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{x}_2 \psi_{3,1} + \mathfrak{r}_3 \cdot \mathfrak{x}_3 \psi_{1,2} = \xi_1 \psi_{2,3} + \xi_2 \psi_{3,1} + \xi_3 \psi_{1,2}$$
$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{y}_1 \psi_{2,3} + \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{y}_2 \psi_{3,1} + \mathfrak{r}_3 \cdot \mathfrak{y}_3 \psi_{1,2} = \eta_1 \psi_{2,3} + \eta_2 \psi_{3,1} + \eta_3 \psi_{1,2}$$
$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{z}_1 \psi_{2,3} + \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{z}_2 \psi_{3,1} + \mathfrak{r}_3 \cdot \mathfrak{z}_3 \psi_{1,2} = \zeta_1 \psi_{2,3} + \zeta_2 \psi_{3,1} + \zeta_3 \psi_{1,2}$$

at løse som tre Ligninger af første Grad med Hensyn til de ubekjendte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ og $\mathfrak{r}_3$.

Endelig er

$$r_1^2 = \mathfrak{r}_1^2 - 2\,\mathfrak{r}_1 (\mathfrak{x}_1 \xi_1 + \mathfrak{y}_1 \eta_1 + \mathfrak{z}_1 \zeta_1) + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$$
$$r_2^2 = \mathfrak{r}_2^2 - 2\,\mathfrak{r}_2 (\mathfrak{x}_2 \xi_2 + \mathfrak{y}_2 \eta_2 + \mathfrak{z}_2 \zeta_2) + \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2$$
$$r_3^2 = \mathfrak{r}_3^2 - 2\,\mathfrak{r}_3 (\mathfrak{x}_3 \xi_3 + \mathfrak{y}_3 \eta_3 + \mathfrak{z}_2 \zeta_3) + \xi_3^3 + \eta_3^2 + \zeta_3^2,$$

og give Hypothesens Slutningsværdier for r_1, r_2 og r_3.

Stilles der os saa, efter at de rette Værdier for Afstandene og det fuldstændige Sæt af heliocentriske Koordinater ere fundne, den Opgave at beregne Koordinaterne til en given Tid t, saa forberedes denne Regning derved, at man med de fundne tre heliocentriske Afstandes Kvadrater opfattede som hele algebraiske Funktioner af Tiden interpolerer sig til den til t svarende Værdi af r^2 og med denne i Forbindelse med to af de til bekjendte Tider (bedst de nærmeste) svarende Steders heliocentriske Afstande beregner de tre s'er og deraf de tre ψ'er, hvorefter (1) give de til Tiden t svarende heliocentriske Koordinater, under Forudsætning af at den af disse beregnede Værdi for

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

stemmer tilstrækkeligt nær med den interpolerede Værdi. Naar man skal beregne en Række Steder og iagttager den Forsigtighed at begynde med et Par Steder, som ligge nær ved de første tre, for at benytte de for disse Steder fundne Værdier for r^2 til Brug ved den foreløbige Interpolation, vil det ved Iagttagelse af slig Forsigtighed kun yderst sjældent hændes, at et Ephemeridested maa regnes to Gange, fordi dets Afstand ikke stemmer med Forudsætningen. Den væsentligste Ulempe ved disse Regninger er, at φ'erne bør beregnes med et lidt rigeligt Antal Cifre.